

量子系におけるマクロ・セクター・測定

岡村 和弥 (ドレスト光子研究起点)

E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

物理理論の進展に数学が貢献した例は数多くあり、新しい物理概念の実装は新しい数学を導入してはじめて実現される場合がある。量子論の場合、フォン・ノイマンがヒルベルト空間を用いて量子力学の公理系を“完成”させたのはよく知られているが、量子場理論や量子情報理論にはその数学的研究を通じて長きに渡って様々な数学が供給され続けている。

量子論の代数的定式化では、 $*$ -代数 \mathcal{A} により物理量代数を記述し、 \mathcal{A} 上の期待値汎関数 ω により状態を記述する。代数的な観点からはヒルベルト空間は解析で必要に応じて利用する二次的なものとして扱われる。この定式化において、ヒルベルト空間は状態 ω ごとに GNS 表現 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$ (記号は著者の前回のオフシエル科学フォーラム記事参照) で与えられる:

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(A) \Omega_\omega \rangle, \quad A \in \mathcal{A}. \quad (1)$$

量子場理論の定式化には $*$ -代数の特殊な場合である C^* -代数 \mathcal{X} が用いられる。以下ではその場合に限定して議論する。GNS 表現により様々なヒルベルト空間が与えられることがわかったが、ヒルベルト空間そのものだけでなく表現に物理的意味がある、ということが代数的定式化での本質的な概念的理解の進歩である。この進歩に対しては [1] の貢献が多岐である。[1] 以前にも代数的定式化の研究はあったが、(状態の選択に応じて) 様々な表現が登場する事実と向き合い成功を収めたのは [1] が最初であろう。[1] では、表現の「物理的同値」(弱同値とも呼ぶ) を用いて同値な表現の間の取り替えに明確な意義を与えた。[2, 3] では、(代数的) 量子場理論において一定の基準で選ばれた異なる表現が共存する状況に物理的に意味が与えられた。DHR 選択基準と呼ばれる、(真空状態から GNS 表現で得られる) 真空表現とある領域と空間的な領域上の物理量のなす代数の表現として (ユニタリー変換を通じて) 等価な表現を選び取る基準を満たす表現は、量子場の局在励起がある状況を記述する。そのうちある条件を満たすクラス (集まり) は、位相的電荷が存在する状況に対応しており、それらを用いることにより物理量代数 \mathcal{A} から場の代数 \mathcal{F} と大域ゲージ群 G が再構成されることが [4] で示された。この成果は代数的量子場理論における象徴的な結果として知られている。電荷が異なる表現はそれぞれに (ユニタリー同値類で) セクターを形成し、それらは単に互いに非ユニタリー同値というだけでなく「無縁 (互いに素とも言う)」の関係にあつて所謂「超選択則 (superselection rule)」が生じる。ここの大域ゲージ群 G は破れがない対称性にあたり、[4] の成果は破れた対称性にはこのままでは有効でない ([5] 参照)。対称性が果たしてきた歴史的意義と効用、そして対称性の破れのある状況の重要性は別の機会に譲る。[4] の結果の対称性の破れのある状況への拡張は [5, 6] でなされていて、その上で、小嶋 [7] は一般化したセクターを「因子状態の準同値類」として定義し、測定を含む様々な文脈での量子系におけるマクロ的側面を統一的に扱うことを可能にした。

量子測定理論の今日までの発展は [8] によるインストルメント (instrument) の導入が大きい。インストルメントは統計的観点から導入されたものであり、測定装置を用いて系を測定することで得られる確率分布と、測定後の状態を指定するために用いられる。しかし、[8] で導入されたインストルメントもはじめは通常の量子力学の記述との関係が不明であったため、インストルメントを用いた解析は [9] の登場まで進展しなかった。[9] では完全正值インストルメントと、測定の量子力学的モデリングである測定過程が導入された。[9] の主結果から、有限自由度量子系でのどの

完全正值インストルメントも測定過程をもちいて定義されることが知られている。更には、一般のフォン・ノイマン代数で記述される無限自由度量子系での完全正值インストルメントの理論は最近 [10] で発展した。現行の測定理論では、確率分布と測定後の状態に焦点を当てることで測定によりマクロ化する要素が選択され、量子力学的モデリングとの関係を調べたことが成功につながったのである。

より一般に C^* -代数で記述される量子系での測定理論では、セクター概念および完全正值インストルメントを統合した形での測定の記述が必要であると考えている。その理由は、状態概念に関わる統計的な文脈では、測定値の違いがマクロに区別される差異であるべしと考えるのが自然だからである。すなわち、測定値が異なれば無縁な状態になる状況に結びつける物理過程が測定であるという考え方である。この考え方からすれば、測定の量子力学的モデリングである測定過程も当然重要ではあるが、測定の物理的意味付けおよび記述法の確立のため必ずしも第一に考慮すべきものではない。その一方で、セクターの測定による識別自体が測定理論的な記述により正当化されるという利点がある。本稿で述べた C^* -代数で記述される量子系での測定理論の確立によって、量子系におけるマクロの理解に新たな展望が開けると確信している。[11] ではこの試みの一部を実現している。また、[12] は本稿の内容の源流となる結果である。現在執筆中の論文において本稿の試みを実現させるととも [12] では未完になった領域まで手が届いて、新しいマクロ・測定の理解を共有できるようにしていく予定である。本年もよろしく願いいたします！

参考文献

- [1] R. Haag and D. Kastler, An algebraic approach to quantum field theory, *J. Math. Phys.* **5**, 848–861 (1964).
- [2] S. Doplicher, R. Haag, and J.E. Roberts, Fields, observables and gauge transformations I & II, *Comm. Math. Phys.* **13**, 1–23 (1969); **15**, 173–200 (1969).
- [3] S. Doplicher, R. Haag, and J.E. Roberts, Local observables and particle statistics I & II, *Comm. Math. Phys.* **23**, 199–230 (1971); **35**, 49–85 (1974).
- [4] S. Doplicher and J.E. Roberts, Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, *Comm. Math. Phys.* **131**, 51–107 (1990).
- [5] I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria: order parameters of symmetries and of thermal stability and physical meanings of adjunctions, *Open Sys. Inform. Dyn.* **10**, 235–279 (2003).
- [6] I. Ojima, Temperature as order parameter of broken scale invariance, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40**, 731–756 (2004).
- [7] I. Ojima, Micro-macro duality in quantum physics. In *Stochastic Analysis: Classical And Quantum: Perspectives of White Noise Theory*, (World Scientific, 2005) (pp.143–161).
- [8] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, *Commun. Math. Phys.* **17**, (1970), 239–260.
- [9] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous observables, *J. Math. Phys.* **25**, (1984), 79–87.
- [10] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics, *J. Math. Phys.* **57**, (2016), 015209.
- [11] 岡村 和弥, A C^* -algebraic approach to quantum measurement, *数理解析研究所講究録* **2123**, (2019).
- [12] I. Ojima, K. Okamura, and H. Saigo, Derivation of Born rule from algebraic and statistical axioms, *Open Sys. Inform. Dyn.* **21**, 1450005 (2014).